Частные производные и дифференцируемость

Пусть точка – внутренняя точка определения функции . Рассмотрим частное приращение функции в этой точке, соответствующее приращению аргумента :

;

зависит и только от (при фиксированной точке .

**Определение:** Если существует , то он называется частной производной функции в точке по переменной .

Для частной производной по переменной в точке M используются различные обозначения: .

Вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производных фунцкии одной переменной.

Примеры:

1. .

Физический смысл частной производной

Частная производная характеризует скорость изменения функции в точке M в направлении оси Ox.

**Замечание**. Если M – граничная точка области определения функции, то для неё введенное определение частной производной может быть непригодно. Например, для точки на рис 9.7 не существует частное приращение .

В этом случае, если существует во внутренних точках M области определения функции, то полагают = (если этот предел существует).

Рассмотрим теперь полное приращение функции во внутренней точке , если её полное приращение в этой точке можно представить в виде

(9.5)

Где - какие-то числа(то есть они не зависят от ), -бесконечно малые функции при { }, равные нулю при

(то есть

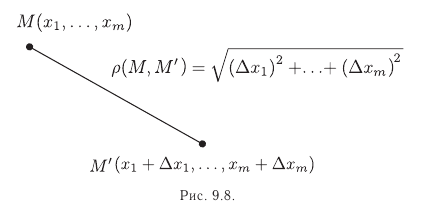
Равенство (9.5) назовём условием дифференцируемости функции в точке .

**Физический смысл дифференцируемости функции многих переменных**

Поставим такой вопрос: можно ли скорость изменения функции по любому направлению в точке M выразить через скорости и

Оказывается, что не всегда. Если дифференцируема в точке M, то можно. Это станет ясно из дальнейшего. Вспомним, что для функции одной переменной условие дифференцируемости имело вил:

Возникает вопрос: Каков аналог слагаемого в случае функции переменных? Можно предположить, что аналогом будет сумма []. Но это не верно! Чтобы дать правильный ответ на поставленный вопрос, обозначим буквой расстояние между точками и



Докажем, что условие (9.5) дифференцируемости функции в точке M можно записать в виде

(9.6)

Причем слагаемое или Обозначим сумму , входящую в правую часть равенства (9.5), буквой h. Если

, то поэтому и следовательно, h=0. Если же , то

И так как {} при , то все при , а поскольку то при . Таким образом при и при . Мы доказали что из (9.5) следует (9.6).

Докажем, что верно и обратное, то есть если приращение функции в точке M можно представить в виде (9.6), где слагаемое равно нулю при , то можно представить и в виде (9.5), причем все при {} и при

Обозначим слагаемое в равенстве (9.6) буквой h. Если , то

Для каждого обозначим функцию через . Она определена при и так как = (o(ρ))/ρ → 0 при и, значит при {}. Если , то есть , то положим . Таким образом, мы представили функцию в виде причем функции при {} и при . Это означает, что условие (9.6) можно записать в виде (9.5).

**Замечание.** Если функция дифференцируема в точке M, то она и непрерывна в точке M.

В самом деле, если функция дифференцируема в точке M, то её полное приращение в этой точке можно представить в виде (9.5), откуда следует, что а это и означает(согласно разностной форме условия непрерывности функции). Что данная функция непрерывна в точке M.

**Связь дифференцируемости с существованием частных производных.**

Для функции одной переменной существование производной в точке является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции в точке . Для функции многих переменных существование частных производных в точке уже не является достаточным условием её дифференцируемости в этой точке.

**Теорема 14** (необходимое условие дифференцируемости функции).

Если функция дифференцируема в точке , то она имеет в точке M частные производные по всем переменным.

**Доказательство**: Запишем условие дифференцируемости функции в точке M в виде(9.5):

Положим все , кроме а , где k – любой номер от 1 до m. Тогда , где , при при . Отсюда получаем: при , то есть .

Таким образом, существует .

Теорема доказана.

**Следствие**. Условие (9.5) дифференцируемости функции в точке M можно записать в виде:

Отметим, что обратное к теореме 14 утверждение не верно.

**Теорема 15 (достаточное условие дифференцируемости функции)**

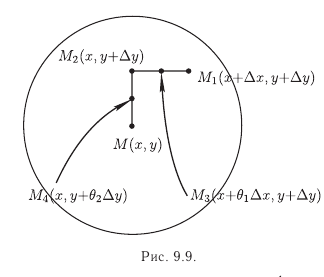
Если функция имеет частные производные по всем переменным в некоторой - окрестности точки причем в самой точке M эти частные производные непрерывны, то функция дифференцируема в точке M.

**Доказательство**: Проведем доказательство теоремы для функции двух переменных (для сокращения записи). Пусть частные производные и существуют в - окрестности точки и непрерывны в самой точке M. Возьмем и столь малыми, чтобы точка лежала в этой -окрестности точки M, и рассмотрим полное приращение функции в точке M:

*.*

Где .

К разностям в квадратных скобках мы применили формулу Лагранжа конечных приращений, при этом производные и берутся в промежуточных точках и (рис 9.9).



Так как по условию теоремы и непрерывны в точке , то ,, где и при , при .

Следовательно,

То есть выполнено условие дифференцируемости фнукции f(x,y) в виде (9.7). Теорема 15 доказана.

**Дифференцируемость сложной функции**

Рассмотрим сложную функцию , то есть , где .

**Теорема 16**. Пусть:

1. Функция дифференцируемы в точке
2. Функция дифференцируема в точке , где

Тогда сложная функция дифференцируема в точке .

**Доказательство** Дадим произвольное приращение и аргументам и в точке . Функции , и получат приращения и , которые в силу условия 1 можно представить в виде

(9.8)

Этим приращениям и соответствует приращение функции в точке , которое в силу условия 2 можно записать в виде

где при , при , и, следовательно при {}, при .

Подставляя(9.8) в (9.9), проходим к равенству, которое запишем в виде:

(9.9)

Где

И

числа,а

и

Функции, удовлетворяющие, очевидно, условиям

при

Равенство(9.10) означает, что сложная функция дифференцируема в точке . Теорема доказана.

Из равенства (9.10) следуют формулы для производных сложной функции:

Эти же формулы запишем в более кратком виде:

(9.11)

При такой записи более наглядно видна зависимость от и через каждый из аргументов .

**Дифференциал функции многих переменных**

Пусть функция дифференцируема в точке M. Тогда её приращение в этой точке можно представить в виде

где при {}, при

Обе суммы, заключенные в круглые скобки в правой части равенства, являются бесконечно малыми при . При этом первая сумма является линейной относительно частью приращения функции, а вторая сумма – бесконечно малой более высокого порядка, чем линейная часть, при .

**Определение.** *Дифференциалом* (первым дифференциалом) функции в точке M называется линейная относительно часть приращения функции в точке M:

Дифференциалом независимой переменной x\_i будем называть приращение этой переменной:

.

Выражение для дифференциала функции в точке M запишется теперь так:

**Лемма 4 (об инвариантности формы первого дифференциала)**.

Формула (9.13) остается в силе, если является не независимыми переменными, а дифференцируемыми функциями каких-то независимых переменных.

**Доказательство:** Пусть - дифференцируемая функция, - дифференцируемые функции независимых переменных . Тогда используя формулу (9.12), можно записать цепочку равенств:

Первое равенство в этой цепочке написано в соответствии с определением дифференциала функции, во втором равенстве используется формула (9.12), третье равенство получено путем изменения порядка суммирования и, наконец, в последнем равенстве использовано то, что дифференциал функции выражается (согласно определению дифференциала функции) формулой:

Итак,

(9.14)

То есть формула (9.13) имеет место и в том случае, когда -дифференцируемые функции каких-либо независимых переменных. Лемма 5 доказана.

**Замечание.** Отличие формулы (9.14) от формулы (9.13) состоит в том, что в формуле (9.13) - приращение переменной , а в формуле (9.14) - дифференциал функции , поэтому, здесь, вообще говоря, . Таким образом, формула (9.14) показывает, что сохраняется форма(вид) выражения для дифференциала функции, а содержание (наполнение) этой формулы изменяется.

**Правила дифференцирования**

Пусть и – дифференцируемые функции аргументов

Тогда:

Докажем, например, формулу 4. Введем функцию он является сложной функцией аргументов В силу леммы 5

Что и требовалось доказать.